Solution 14 :

1°/

• $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ d'où $2^{10n} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n+3} \equiv 8 \pmod{11}$

• $3^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{5n} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{5n+3} \equiv 5 \pmod{11}$

d'où : $2^{10n+3} + 3^{5n+3} - 2 \equiv 0 \pmod{11}$

2°/

• D'après le petit théorème de Fermat

$n^7 \equiv n \pmod{7}$ car 7 est premier $\Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod{7}$

• $n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1)$

$= n(n-1)(n+1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$

Si $n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod{2}$

$n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod{2}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} : n^7 - n \equiv 0 \pmod{2}$

• si $n \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod{3}$

si $n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow n^7 - n \equiv 1 \pmod{3}$

si $n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow n^7 \equiv 2^7 \equiv 2 \equiv n \pmod{3}$

et par suite $n^7 - n \equiv 0 \pmod{3}$

2 et 3 sont premiers entre eux donc $(n^7 - n) \equiv 0 \pmod{6}$

6 et 7 sont premiers entre eux donc $n^7 - n \equiv 0 \pmod{42}$ car : $\begin{cases} n^7 - n \equiv 0 \pmod{} \\ n^7 - n \equiv 0 \pmod{} \end{cases}$

Solution 15 :

1°/ Soit p un nombre premier :

Pour tout $n \in \mathbb{N} : n^p \equiv n \pmod{p}$

2°/ 17 est un nombre premier donc d'après le petit théorème de Fermat

$(n+1)^{17} \equiv (n+1) \pmod{17}$

On a $(n+1)^{17} \equiv 2(17) \Leftrightarrow (n+1) \equiv 2(17) \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{17}$

D'où $n = 17k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$